Correction CC 2

Exercice 1 : 6 points

a) Soit $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$.

- f est continue sur $]0, 1[$.
- Au voisinage de 0 : $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$, et la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable au voisinage de 0 (c'est une intégrale de Riemann). Pour s'en convaincre, on peut faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[2\sqrt{t} \right]_x^1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (2 - 2\sqrt{x}) \\ &= 2 < +\infty \end{aligned}$$

Donc la fonction f est intégrable au voisinage de 0.

- Au voisinage de 1 : $f(t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{1-t}$, et la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ n'est pas intégrable au voisinage de 1. Pour s'en convaincre, posons $h = 1 - t$. On a alors $f(h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{h}$ (c'est une intégrale de Riemann). Pour se convaincre de la non-intégrabilité de la fonction inverse, on peut faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{h} dh &= \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 \frac{1}{h} dh \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} [\ln h]_x^1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (0 - \ln x) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Donc la fonction f n'est pas intégrable au voisinage de 1.

Conclusion, f n'est pas intégrable sur $]0, 1[$, et donc $\boxed{\int_0^1 f}$ est divergente.

b) Soit $f : t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$.

- f est continue sur $]0, +\infty[$.
- Au voisinage de 0 : $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln t$, et la fonction $\ln$ est intégrable au voisinage de 0 (voir Exercice 2.b). Pour s'en convaincre, on peut faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln t dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 \ln t dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} [t \ln t - t]_x^1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (-1 - x \ln x + x) \\ &= -1 < +\infty \end{aligned}$$

Donc la fonction f est intégrable au voisinage de 0.

- Au voisinage de $+\infty$: $f(t) = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^{3/2}} \right)$. En effet, $t^{3/2} f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$. Et la fonction $t \rightarrow \frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (c'est une intégrale de Riemann). Pour s'en convaincre :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^{3/2}} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{2}{\sqrt{t}} \right]_1^x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{\sqrt{x}} + 2 \right) \\ &= 2 < +\infty \end{aligned}$$

Donc la fonction f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Conclusion, f est intégrable sur $]0, +\infty[$, et donc $\int_0^{+\infty} f$ est convergente.

- c) Soit $f : t \mapsto \sin \left(\frac{1}{t^2} \right)$.

- f est continue sur $]0, +\infty[$.
- Au voisinage de 0 : f est bornée, et donc intégrable au voisinage de 0. En effet, soit $t > 0$, $|f(t)| = \left| \sin \left(\frac{1}{t^2} \right) \right| \leq 1$.
- Au voisinage de $+\infty$: $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$ (car $\frac{1}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$), et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ (c'est une intégrale de Riemann). Ainsi, f est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Conclusion, f est intégrable sur $]0, +\infty[$, et donc $\int_0^{+\infty} f$ est convergente.

- d) Soit $f : t \mapsto \ln(t)e^{-t}$.

- f est continue sur $]0, +\infty[$.
- Au voisinage de 0 : $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln t$, et donc f est intégrable au voisinage de 0 (cf question b.)
- Au voisinage de $+\infty$: $f(t) = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$, et donc f est intégrable au voisinage de $+\infty$. En effet, $t^2 f(t) = t^2 \ln(t)e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$.

Conclusion, f est intégrable sur $]0, +\infty[$, et donc $\int_0^{+\infty} f$ est convergente.

Exercice 2 : 4.5 points

a) La fonction $t \mapsto \cos^2 t$ est continue et donc intégrable sur $[0, 2\pi]$. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt &= \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2t)}{2} \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \, dt + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)}{2} \, dt \\ &= \pi + \left[\frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{2\pi} \\ &= \pi + \left(\frac{\sin(4\pi)}{4} - \frac{\sin(0)}{4} \right) \end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi.}$

b) La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est continue et donc intégrable sur $[1, 2]$. Effectuons une intégration par partie, avec $\begin{cases} u(t)=t \\ v(t)=\ln t \end{cases}$ $\begin{cases} u'(t)=1 \\ v'(t)=\frac{1}{t} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln(t) \, dt &= [t \cdot \ln(t)]_1^2 - \int_1^2 t \cdot \frac{1}{t} \, dt \\ &= 2 \cdot \ln(2) - \ln(1) - (2 - 1) \end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{\int_1^2 \ln(t) \, dt = 2 \cdot \ln 2 - 1.}$

c) La fonction $t \mapsto \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue, et donc intégrable sur $[0, 1]$. Ici, soit on reconnaît une forme en $u'/\sqrt{u}$, soit on effectue un changement de variable : $\begin{cases} u = 1 + t^2 \\ du = 2t \, dt \end{cases}$, et on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \, dt &= \int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{u}} \, du \\ &= [\sqrt{u}]_1^2 \\ &= \sqrt{2} - \sqrt{1} \end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \, dt = \sqrt{2} - 1.}$

Exercice 3 : 9.5 points**1. : 1 point**

La fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, et donc intégrable au voisinage de 0. De plus, au voisinage de $+\infty$: $f(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{x^2} \right)$, et donc f est intégrable sur $[0, +\infty[$, i.e. $\boxed{I \text{ est bien définie.}}$

2. 2 points

La fonction h est continue et dérivable sur $] -1, +\infty[$, et on a, $\forall x > -1$:

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

$\forall x > -1$, $1+x > 0$, donc h' est du signe de x , et on a le tableau de variations suivant :

x	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$		-	+
h	$+\infty$		$+\infty$

Donc h est positive sur $x \in]-1, +\infty[$. Conclusion, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.

3. 6.5 points

Soit $n > 0$.

(a) 0.5 points

La fonction $x \mapsto \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Elle est donc intégrable au voisinage de 0. De plus, $\forall x \geq 0$, $\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)} \leq \frac{n^n}{x^{2n}}$. Or, comme $n \geq 1$, on a $2n \geq 2$, et donc la fonction $x \mapsto \frac{n^n}{x^{2n}}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. Conclusion, c_n est bien défini.

(b) 3 points

On a vu, pour tout $X > -1$, $\ln(1+X) \leq X$. Soit alors $X = -\frac{x^2}{n}$. Pour tout $x \in [0, \sqrt{n}]$, on a bien $X = -\frac{x^2}{n} > -1$, et on peut donc appliquer l'inégalité à X .

Il vient, pour tout $x \in [0, \sqrt{n}]$:

$$\ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \leq -\frac{x^2}{n}$$

Donc,

$$n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \leq -x^2$$

Puis, par croissance de la fonction exponentielle :

$$\exp\left[n \ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right] \leq e^{-x^2}$$

C'est-à-dire,

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2}$$

Finalement, par positivité de l'intégrale, on peut intégrer cette inégalité sur $[0, \sqrt{n}]$, et on obtient $b_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx$.

De même, posons $X = \frac{x^2}{n}$. Alors $X > -1$, et on a, pour tout $x \in [0, \sqrt{n}]$:

$$\ln \left(1 + \frac{x^2}{n} \right) \leq \frac{x^2}{n}$$

Donc,

$$-n \ln \left(1 + \frac{x^2}{n} \right) \geq -x^2$$

Puis, par croissance de la fonction exponentielle :

$$\exp \left[-n \ln \left(1 + \frac{x^2}{n} \right) \right] \geq e^{-x^2}$$

C'est-à-dire,

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n} \right)^n} \geq e^{-x^2}$$

Par positivité de l'intégrale, on peut intégrer cette inégalité sur $[0, \sqrt{n}]$, et on obtient :

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n} \right)^n} dx$$

Or, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n} \right)^n}$ est positive sur $[0, +\infty[$, donc on a :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n} \right)^n} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n} \right)^n} dx = c_n$$

Conclusion, $\boxed{\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq c_n}$.

(c) **2 points**

- Dans l'expression de b_n , effectuons le changement de variable $\begin{cases} x = \sqrt{n} \sin t \\ dx = \sqrt{n} \cos t dt \end{cases}$

On a alors :

$$\begin{aligned} b_n &= \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n} \right)^n dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{n} \cos t (1 - \sin^2 t)^n dt \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sqrt{n} (\cos t)^{2n+1} dt \end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{b_n = \sqrt{n} a_{2n+1}}$.

- Dans l'expression de c_n , effectuons le changement de variable $\begin{cases} x = \sqrt{n} \tan t \\ dx = \sqrt{n}(1 + \tan^2 t) dt \end{cases}$

On a alors :

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{n}(1 + \tan^2 t) \frac{1}{(1 + \tan^2 t)^n} dt \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1 + \tan^2 t)^{n-1}} dt \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2n-2} dt \quad \text{car} \quad 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{c_n = \sqrt{n}a_{2n-2}}$.

(d) **1 point**

D'une part, $b_n = \sqrt{n}a_{2n+1} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $c_n = \sqrt{n}a_{2n-2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

D'autre part, $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Conclusion, d'après l'encadrement obtenu à la question 3.b, on a : $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.