Correction CC 1

Exercice 1 : 8 points

1.1 : 4 points

- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue, positive et décroissante sur $]0, +\infty[$.
Soit alors $p > 1$. On a :

$$\begin{cases} \forall x \in [p-1, p], \frac{1}{p} \leq \frac{1}{x} \\ \forall x \in [p, p+1], \frac{1}{x} \leq \frac{1}{p} \end{cases}$$

Il vient, par positivité de l'intégrale :

$$\boxed{\int_p^{p+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{p} \leq \int_{p-1}^{p} \frac{dx}{x}} \tag{1}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En réécrivant la somme définissant S_n, on obtient :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p}$$

Ainsi, en sommant les inégalités (1) pour tout $p \in [\![n+1, 2n]\!]$:

$$\sum_{p=n+1}^{2n} \int_p^{p+1} \frac{dx}{x} \leq S_n \leq \sum_{p=n+1}^{2n} \int_{p-1}^{p} \frac{dx}{x}$$

d'où

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x} \leq S_n \leq \int_{n}^{2n} \frac{dx}{x}$$

or, une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est la fonction $x \mapsto \ln x$. On a donc :

$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) \leq S_n \leq \ln(2n) - \ln(n)$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2n}{n}\right) = \ln 2$, conclusion $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln 2.}$

1.2 : 4 points - (*)

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On écrit :

$$S'_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{\substack{\text{On force tous les termes} \\ \text{à être positifs}}} \underbrace{-2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right]}_{\substack{\text{On soustrait 2 fois} \\ \text{les termes négatifs de } S'_{2n}}}$$

Il vient alors :

$$S'_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Finalement, $\boxed{S'_{2n} = S_n.}$

• On en déduit que $S'_{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln 2$. D'autre part, $S'_{2n+1} = S'_{2n} + \frac{1}{2n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln 2$.

Les deux suites $(S'_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S'_{2n+1})_{n\geq 0}$ convergent vers la même limite $\ln 2$, on en déduit : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S'_n = \ln 2.}$

Exercice 2 : 10 points

2.1 : 4 points

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$a_{n+1} - a_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

donc $\boxed{\text{la suite } (a_n)_{n\geq 0} \text{ est strictement croissante.}}$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
b_{n+1} - b_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{n.n!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} \\
&= \frac{n.(n+1) + n - (n+1).(n+1)}{n.(n+1).(n+1)!} \\
&= \frac{-1}{n.(n+1).(n+1)!} < 0
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{la suite } (b_n)_{n\geq 0} \text{ est strictement décroissante.}}$

Enfin,

$$b_n - a_n = \frac{1}{n.n!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Conclusion, $\boxed{\text{les suites } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont strictement monotones et adjacentes.}}$

2.2 : 2 points - (*)

Il y a de nombreuses façons de prouver ce résultat, j'en présente une rapide ici, qui utilise l'une des formules de Taylor.

En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $f : x \mapsto e^x$, à l'ordre $n \geq 0$ en 0, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) \right| = \left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \sup_{t\in[0,x]} (e^t) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

car les dérivées de la fonction exponentielle à tout ordre en 0 sont nulles. La borne supérieure est indépendante de n, et la suite $\left(\frac{|x|^n}{n!}\right)_{n\geq 0}$ tend vers 0. En fixant $x = 1$, on en déduit que $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = e.}$

2.3 : 4 points

Soient $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $e = \frac{p}{q}$. Comme les suites (a_n) et (b_n) sont strictement monotones, et convergent toutes les 2 vers e, on en déduit directement :

$$a_q < a_{q+1} \leq e \leq b_{q+1} < b_q$$

et donc, $\boxed{a_q < e < b_q.}$

On a alors

$$a_q < e < a_q + \frac{1}{q.q!}$$

d'où

$$q.q!.a_q < \underbrace{p.q!}_{\in\mathbb{Z}} < q.q!.a_q + 1$$

or, $q.q!.a_q = q\sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!} = q\sum_{k=0}^{q}[q(q-1)\ldots(k+2)(k+1)] \in \mathbb{Z}$ (car $q \geq k$, $\forall k$).

Ainsi, l'entier $p.q!$ est **strictement** compris entre deux entiers consécutifs, c'est absurde. Conclusion, $\boxed{e \notin \mathbb{Q}}$

Exercice 3 : 14 points

3.1 : 1 point

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_n = \underbrace{\frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times (2n)}}_{\substack{\text{On multiplie par le dénominateur} \\ \text{en haut et en bas}}} = \frac{(2n)!}{(2^n.n!)^2} = \frac{(2n)!}{4^n.(n!)^2}$$

3.2 : 3 points

On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$$

De plus, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est positive, donc minorée par 0. Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geq 1} \text{ converge.}}$

3.3 : 4 points

On a :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+2}{n+1}.\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 = \frac{n+2}{n+1}.\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 = \frac{(n+2)(2n+1)^2}{4(n+1)^3}$$

Rappel : $(n+1)^3 = 1 + 3n + 3n^2 + n^3$.
Ainsi,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4n^3 + 12n^2 + 9n + 2}{4n^3 + 12n^2 + 12n + 4} < 1$$

Donc la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. Elle est aussi minorée par 0, donc $\boxed{(v_n)_{n\geq 1} \text{ converge.}}$ Notons C sa limite. On peut réécrire $u_n = \sqrt{\frac{v_n}{n+1}}$. Il viens alors :

$$u_n \sim \sqrt{\frac{C}{n+1}}$$

Conclusion, $\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0.}$

3.4 : 3 points - (*)

Dans un premier temps :

$$\prod_{k=2}^{2n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{2n} \left(\frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{2n}.$$

D'autre part,

$$u_n^2 = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2$$

or, pour tout $k \geq 2$, on a $\frac{2k-1}{2k} \geq \frac{2k-2}{2k-1}$. On écrit alors :

$$\begin{aligned}
u_n^2 &\geq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\text{terme } k=1} \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{2k-1}{2k}\right) \cdot \left(\frac{2k-2}{2k-1}\right) \\
&\geq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \prod_{k=2}^{n} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2k}\right)}_{\text{termes pairs}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2k-1}\right)}_{\text{termes impairs}} \\
&\geq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \prod_{k=3}^{2n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \\
&\geq 2 \times \frac{1}{2} \times \underbrace{\prod_{k=2}^{2n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)}_{1/2n}
\end{aligned}$$

Conclusion, $\boxed{u_n^2 \geq \frac{1}{4n}.}$

3.5 : 3 points

D'après la question précédente, on a $v_n = (n+1)u_n^2 \geq (n+1)\frac{1}{4n}$. Par passage à la limite, on en conclut $\boxed{C \geq \frac{1}{4}.}$

Exercice 4 : 11 points - (*)

4.1 : 4 points

On fixe $x > 0$. Soit $n \geq 1$. Pour tout $1 \leq k \leq n$, on a :

$$\frac{u_k}{u_{k-1}} = \frac{k}{x}.\ln\left(1+\frac{x}{k}\right).$$

J'étudie plutôt $\frac{u_k}{u_{k-1}}$ *pour alléger un peu les calculs, mais la démarche et les résultats sont rigoureusement identiques.*

On a alors :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{u_k}{u_{k-1}}\right) &= \ln\left[\frac{k}{x}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right] \\
&= \ln\left[\frac{k}{x}\left(\frac{x}{k}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{k}\right)^2+o(\frac{1}{k^2})\right)\right] \\
&= \ln\left[1-\frac{x}{2k}+o(\frac{1}{k})\right] \\
&= -\frac{x}{2k}+o(\frac{1}{k})
\end{aligned}$$

Ainsi, $\ln\left(\frac{u_k}{u_{k-1}}\right) \sim -\frac{x}{2k}$. Or, la série $\sum_{k\geq 1} -\frac{x}{2k}$ diverge vers $-\infty$ (car $x > 0$), donc, par comparaison de séries à termes constants (négatifs ici), $\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty.}$

D'autre part, S_n est une somme téléscopique, on a donc $S_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_1)$. On peut alors en déduire que $\lim_{n\to\infty} \ln(u_n) = -\infty$, puis $\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0.}$

4.2 : 3 points

Notons $v_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n-1}) - \alpha \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On effectue le même développement limité que dans la question précédent, en allant un ordre plus loin. On a alors :

$$\begin{aligned}
\ln(u_n) - \ln(u_{n-1}) &= \ln\left[\frac{k}{x}\left(\frac{x}{k}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{k}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{k}\right)^3+o(\frac{1}{k^3})\right)\right] \\
&= \ln\left[1-\frac{x}{2k}+\frac{x^2}{3k^2}+o(\frac{1}{k^2})\right] \\
&= \left[-\frac{x}{2k}+\frac{x^2}{3k^2}+o(\frac{1}{k^2})\right]-\frac{1}{2}\left[-\frac{x}{2k}+\frac{x^2}{3k^2}+o(\frac{1}{k^2})\right]^2+o(\frac{1}{k^2}) \\
&= -\frac{x}{2k}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right)\frac{x^2}{k^2}+o(\frac{1}{k^2}) \\
&= -\frac{x}{2k}+\frac{5x^2}{24k^2}+o(\frac{1}{k^2})
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}-\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})$$

Ainsi :

$$v_n = \ln(u_n) - \ln(u_{n-1}) - \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{-x/2 - \alpha}{n} + \frac{5x/24 - \alpha/2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

Et la série $\sum v_n$ converge si et seulement si le terme en $\frac{1}{n}$ est nul.

Conclusion, la série converge si et seulement si $\boxed{\alpha = -\frac{x}{2}.}$

Remarque : l'exercice est beaucoup moins calculatoire en utilisant des O. En effet, on écrit $\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})$.

4.3 : 2 points

On réarrange les termes de v_n :

$$v_n = \ln\left(\frac{u_n}{n^\alpha}\right) - \ln\left(\frac{u_{n-1}}{(n-1)^\alpha}\right)$$

et $\sum v_n$ converge, donc la suite $\left(\frac{u_n}{n^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ aussi. Il existe donc $A \in \mathbb{R}^*$ tel que $\frac{u_n}{n^\alpha} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$.

Autrement dit, $\boxed{u_n \sim An^\alpha.}$

4.4 : 2 points

On reconnaît une série de Riemann, donc on peut conclure : $\sum u_n$ converge ssi $\alpha < -1$, c'est-à-dire, $\boxed{\sum u_n \text{ converge ssi } x > 2.}$