Contrôle continu 3
durée : 2h

Exercice 1. (6 points) On pose

$$u_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx), \text{ avec } x \in \mathbb{R}_+$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 0}$ sur $[0, +\infty[$.
2. Étudier la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
3. Étudier la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2. (6 points) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$.
3. Soit ε un réel strictement positif. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ est normalement convergente sur $[\varepsilon, +\infty[$.
4. Notons $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3. (8 points) Pour $x \geq 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

1. a) Montrer que S est bien définie, c'est-à-dire que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge simplement.
   b) Montrer que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_+$.
   c) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u'_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
   d) En déduire que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Préciser le sens de variation de S.
3. Etablir
$$\forall x > 0,\ S(x+1) + S(x) = \frac{1}{x}$$
4. Donner un équivalent de S en 0.