Contrôle continu 2
durée : 2h

Exercice 1. (6 points) Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$\text{a)} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)\sqrt{t}} \quad \text{b)} \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \quad \text{c)} \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t \quad \text{d)} \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 2. (4.5 points) Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{a)} \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \quad \text{b)} \int_1^2 \ln t\,\mathrm{d}t \quad \text{c)} \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 3. (9.5 points) L'objectif de cet exercice est de calculer

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

1. Montrer que I est bien définie, c'est-à-dire que la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
2. Soit $x \in]-1, +\infty[$. On pose $h(x) = x - \ln(1+x)$.
   Etudier les variations de h sur $]-1, +\infty[$.
   En déduire que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$b_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x \quad \text{et} \quad c_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}.$$

   Soit alors $n > 0$.

   (a) Montrer que c_n est bien défini.

   (b) En utilisant l'inégalité montrée dans la question 2., démontrer la double inégalité suivante :

$$b_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\mathrm{d}x \leq c_n$$

   (c) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x.$$

   A l'aide de changements de variable bien choisis, exprimer b_n et c_n en fonction de a_{2n+1} et a_{2n-2}.

   (d) On admet que $a_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. En déduire la valeur de I.