Contrôle continu 1
durée : 2h

Exercice 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \text{ et } S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

1. Etablir que pour tout $p > 1$,

$$\int_p^{p+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{p} \leq \int_{p-1}^{p} \frac{dx}{x}$$

   En déduire la limite de $(S_n)_{n\geq 1}$.

2. Etablir que $S'_{2n} = S_n$. En déduire la limite de $(S'_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 2.

Soient

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n.n!} = a_n + \frac{1}{n.n!}$$

1. Montrer que (a_n) et (b_n) sont strictement monotones et adjacentes.
2. Montrer que leur limite commune est e.

   On désire montrer que $e \notin \mathbb{Q}$ et pour cela on raisonne par l'absurde en supposant $e = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^\star$.
3. Montrer que $a_q < e < b_q$ puis obtenir une absurdité.

Exercice 3.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}$$

1. Exprimer u_n à l'aide de nombres factoriels.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$v_n = (n+1)u_n^2$$

   Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.
4. Simplifier

$$\prod_{k=2}^{2n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

   et comparer ce produit à u_n^2.
5. En déduire que la limite C de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est strictement positive.

Exercice 4.

On fixe $x > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$u_n = \frac{n!}{x^n} \prod_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)$$

1. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)$. Montrer que S_n tend vers $-\infty$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et préciser sa limite.
2. Etablir l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la série de terme général :

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

converge.

3. Etablir l'existence de $A \in \mathbb{R}^\star$ tel que $u_n \sim A n^\alpha$.
4. Etudier la convergence de la série de terme général u_n.